

# 利用 R 軟體探討 t 信賴區間的穩健性

## Using R to Explore the Robustness of the t Confidence Interval

胡學穎

Shueh-Inn Hu

銘傳大學應用統計資訊學系

Department of Applied Statistics and Information Science,  
Ming Chuan University

### 摘要

在基礎的統計學課程裡都會教在母體標準差未知的情形下如何利用 t 信賴區間對於母體平均數做估計，而在做此信賴區間的前提是母體的分佈應該要是常態。本文將敘述如何用統計軟體 R 對於數種非常態的分佈做電腦模擬，並利用所模擬出的抽樣結果來探討當母體分佈並非常態時其對於 t 信賴區間所造成的影響，以期能夠幫助學生了解 t 信賴區間在不同情況下之穩健性。

關鍵字：t 檢定統計量、穩健性。

### Abstract

How to use the t confidence interval to estimate the population mean is a topic that is covered in every elementary statistics course. I will discuss how to implement statistical software R for simulating data from various Non-Normal populations, and also how to use the simulated sample data to explore the performance of the t confidence interval, so that students can learn the robustness of the t confidence interval under different scenarios.

Keywords: t-statistic, robustness.

## 1. 緒論

在基礎的統計學課程裏都會教在母體標準差( $\sigma$ )未知的情形下如何利用 t 信賴區間對於母體平均數( $\mu$ )做估計，而在做此檢定的前提是母體的分布應該要是常態。

假設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為一個抽自某一母體的隨機樣本，且知  $E(X) = \mu$ 、但母體變異數  $\sigma^2$  是未知的；如果母體的分布為常態，則檢定統計量  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$  就會是自由度(degrees of freedom, 簡寫 d.f.) 為  $n-1$  的 t 分布，這裡的  $\bar{X}$  為樣本平均數、 $s$  是樣本標準差、而  $n$  是樣本大小。所以母體平均數的信賴區間就可以寫成  $\bar{X} \pm t^* \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ ，這裡  $t^*$  代表臨界值[1]。

我將於本文中敘述如何利用統計軟體 R 對於偏態由小到大的三種非常態分布：自由度為 20 的卡方分布、分子自由度為 30、分母自由度為 40 的 F 分布、以及  $\lambda = 1$  的指數分布做電腦模擬；並利用所模擬出的抽樣結果來探討當母體分布為常態的前提沒有被滿足時，其對 t 信賴區間所造成的影響，以期可以幫助學生了解 t 信賴區間在不同情況下之穩健性。

## 2. 數種非常態的連續分布

### 2.1. 自由度為 20 的卡方分布

自由度為 20 的卡方分布其機率密度函數如圖 1 所示，由圖可知此機率密度函數的分布有些右偏。

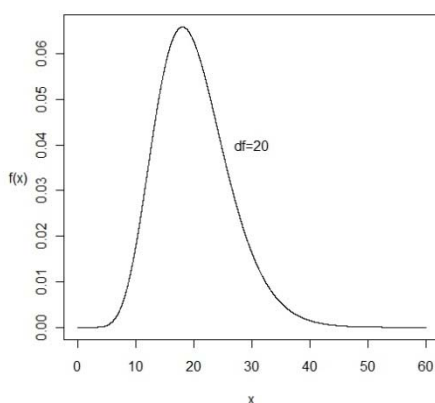


圖1 自由度為20的卡方機率密度函數

用 `rchisq(n,df=20)` 的指令[2]可以得到從自由度為 20 的卡方分布所產生之大小為  $n$  的隨機樣本。以此指令分別對於  $n=20,30$ ,及 45 各抽取 10000 個隨機樣本，並計算其 t 檢定統計量後再畫出直方圖。圖 2 所示為  $n=20$  時所得之 t 檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布已大致對稱。

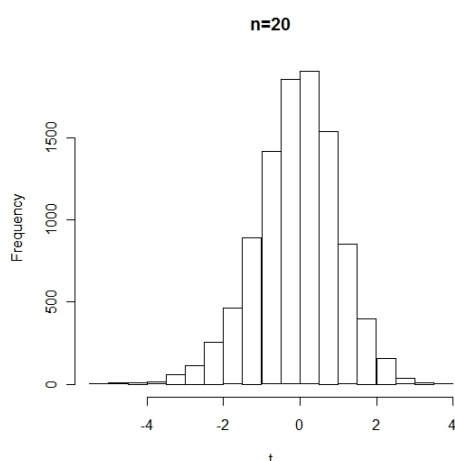


圖2 n=20時t之直方圖

經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.37% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。圖 3 所示為 n=30 時所得之 t 檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布已相當對稱。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.69% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

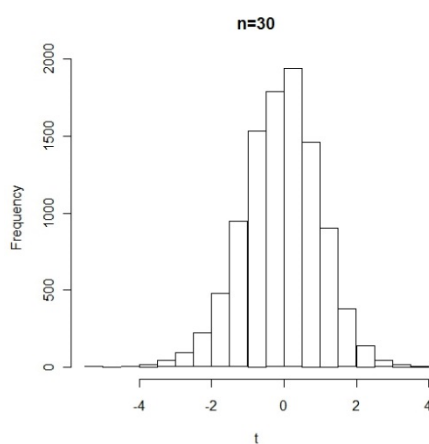


圖3 n=30時t之直方圖

圖 4 所示為 n=45 時所得之 t 檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布已相當對稱。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.98% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

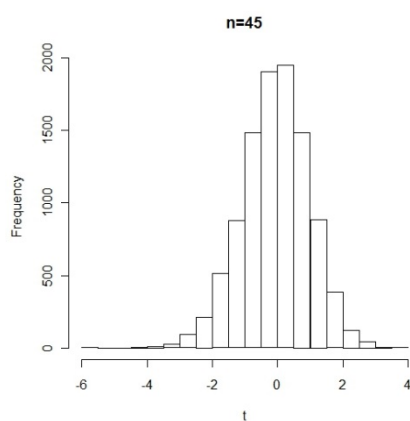


圖4 n=45時t之直方圖

## 2.2. F(30,40)分布

圖 5 為 F(30,40)分布之機率密度函數，由圖可知此分布屬於右偏。用  $rf(n,30,40)$  的指令[2]可以得到從分子自由度為 30、分母自由度為 40 的 F 分布所產生之大小為  $n$  的隨機樣本。圖 6 所示為  $n=20$  時所得之  $t$  檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布似乎有些許的左偏。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.04% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

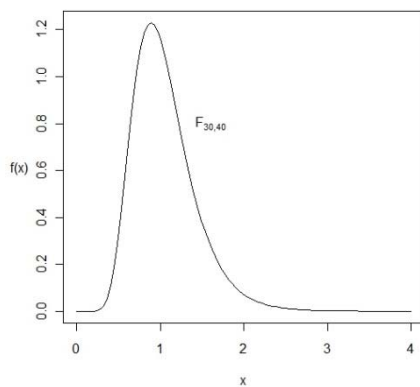


圖5 F(30,40)之機率密度函數

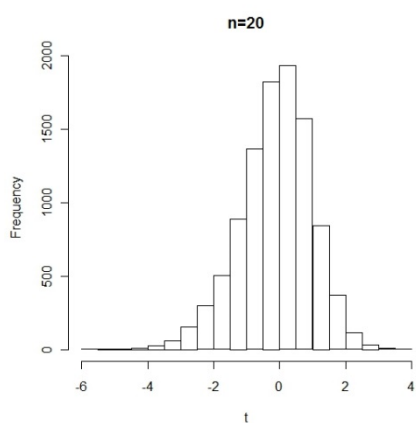


圖6 n=20時t之直方圖

圖 7 所示為 n=30 時所得之 t 檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布似乎有些許的左偏。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.5% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

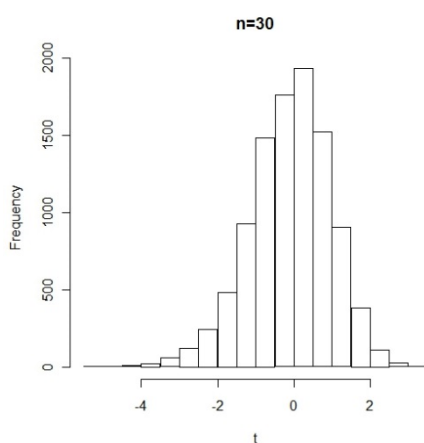


圖7 n=30時t之直方圖

圖 8 所示為 n=45 時所得之 t 檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布大致是對稱的。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.73% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

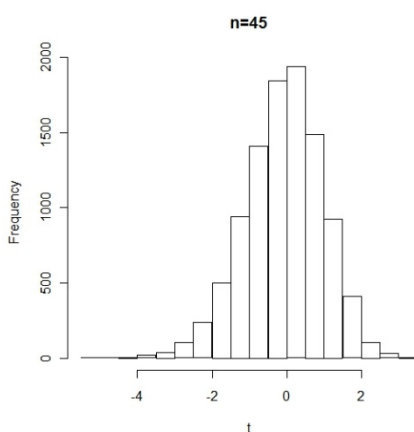


圖8 n=45時t之直方圖

### 2.3. $\lambda = 1$ 的指數分布

圖 9 為  $\lambda = 1$  的指數分布的機率密度函數，由圖可知此分布相當右偏。用 `rexp(n,rate=1)` 的指令[2]可以得到從  $\lambda = 1$  的指數分布所產生之大小為  $n$  的隨機樣本。圖 10 所示為  $n=20$  時所得之  $t$  檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布屬於左偏。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 91.87% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

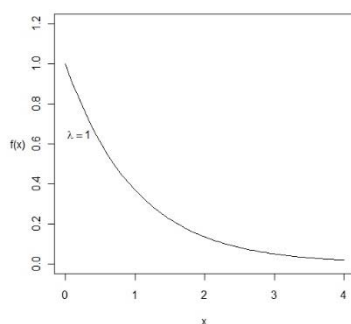


圖9  $\lambda = 1$  的指數分布機率密度函數

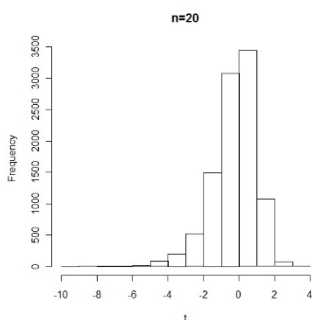


圖10 n=20時t之直方圖

圖 11 所示為  $n=30$  時所得之  $t$  檢定統計量的直方圖，由此圖可以看出此分布仍屬於左偏。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 92.5% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ 。

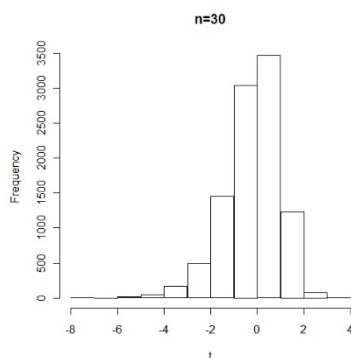


圖 11  $n=30$  時  $t$  之直方圖

由於  $\lambda=1$  的指數分布很不對稱且右偏，即使  $n=100$  時  $t$  的直方圖仍然不甚對稱(見圖 12)。經由每個樣本計算出  $\mu$  之 95% 信賴區間後，發現其中大約 94.2% 的信賴區間確實有包含母體平均數  $\mu$ ，也就是其信賴水準還是未達到名目的信賴水準。

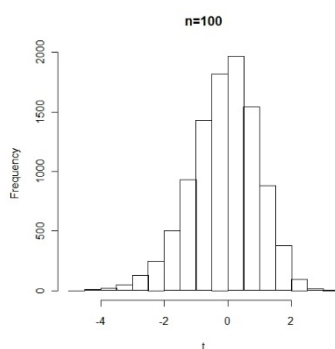


圖 12  $n=100$  時  $t$  之直方圖

### 3. 結論

由 R 統計軟體所作之電腦模擬可以看出即使在母體分布並非常態的情形下，只要該母體分布的偏態不是很大，樣本大小在 45 以上時  $t$  信賴區間之信賴水準就很接近名目的信賴水準。當然如果母體分布的偏態較大時，以  $\lambda=1$  的指數分布為例，要達到名目的信賴水準所需之樣本大小就會隨之增加。

### 4. 參考文獻

- [1] D. Moore and G. McCabe, *Introduction to the Practice of Statistics*, 3<sup>rd</sup> Edition, Freeman, 1998.

- [2] R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.