

應用 GeoGebra 數學軟體於數學課程的教學

Using Dynamic Mathematical Software GeoGebra in Mathematical Course

姜正雄

Cheng-Hsiung Chiang

玄奘大學資訊管理學系

Department of Information Management,
Hsuan Chuang University

摘要

一些調查研究發現數學軟體可以提升學生在數學課程的學習效果。GeoGebra 是一套免費的動態數學軟體，已經有 40 種語言的版本。GeoGebra 可用於幾何繪圖、代數運算、微積分以及統計學等，並且可以撰寫 JavaScript 程式用以控制繪圖物件，讓圖形呈現動態效果。本論文除了簡介 GeoGebra 的基本功能外，也介紹將 GeoGebra 應用於數學課的圖解指數與對數函數單元、求解聯立方程式單元以及用圖解法求解線性規劃問題的單元。從學生的學習效果得知，GeoGebra 軟體對於數學程度較差的學生有較好的學習效果，能夠增加學生學習興趣並且建立信心。

關鍵字：GeoGebra、JavaScript、動態軟體、數學課程

Abstract

Some research had found that mathematical software can enhance students' learning effect in mathematics courses. GeoGebra is a free dynamic mathematical software, and it has been translated to 40 languages. GeoGebra can be applied to Geometrical drawing, Algebra operation, Calculus, Statistics, and so on. We also can write the JavaScript programs to control the objects for revealing the dynamic effect. This paper briefly introduces the basic functions of GeoGebra, and introduces how to apply GeoGebra to draw the exponential and logarithmic functions, to solve linear equation systems, and solve the linear programming problems with two variables. From the learning effect of students, GeoGebra can obviously enhance the learning effect of students with poor mathematical level, and it also can enhance learning interest and confidence.

Keywords: GeoGebra, JavaScript, dynamic software, mathematical course.

1. 前言

在傳統的數學課程中，是以徒手的方式解決數學問題，但是對於幾何作圖等方面不容易有效率地用徒手繪圖。有些數學問題的求解過程較困難，容易降低學生學習興趣並影響信心。有不少學生對於數學缺乏信心以及興趣，提不起學習動機。若能有一套數學軟體用來輔助學生求解數學問題，或者能夠畫出函數圖形，將能提升學習的興趣，幫助對數學問題的理解。有一些先前的研究指出，使用電腦比傳統的學習方式更有效，尤其是在變換的幾何學、多邊形、角柱體以及錐體 (Doğan & Içel, 2011)。

最近這 19 年來有許多研究開發出數學軟體應用於教育中，包括 Logo, Geometer's Sketchpad, Cabri, Derive, Mathematica, Scientific WorkPlace (Hohenwarter & Fuchs, 2004)。GeoGebra 是一套免費的動態數學軟體，能夠被運用於從小學到大學的很多的數學主題；這套軟體結合代數、幾何以及微積分等，容易操作使用 (Akkaya et al., 2011)。GeoGebra 最早由 Markus Hohenwarter 在 2002 年於奧地利薩爾茨堡大學所提出來的 (Hohenwater, 2002)。GeoGebra 是由 Java 所撰寫的，它獲得了幾個國際軟體獎項，包括：(GeoGebra 官方網站)

- MERLOT Classics Award 2013: 學習和網路教學的多媒體教育資源 (Las Vegas, USA)
- NTLC Award 2010: 國家科技領導獎 (Washington D.C., USA)
- Tech Award 2009: 教育範疇的桂冠 (San Jose, California, USA)
- AECT Distinguished Development Award 2008: 教育傳播與技術協會 (Orlando, USA)
- Learnie Award 2006: 奧地利教育軟體獎 (Vienna, Austria)

2. GeoGebra 簡介

GeoGebra 是應用於各個教育階段的動態數學軟體，它能夠解決幾何、代數、表格、繪圖、統計和微積分的問題。GeoGebra 的用戶迅速增加，幾乎每個國家的使用者數量多達數百萬。GeoGebra 已經成為動態數學軟體的領頭軍 (GeoGebra 官方網站)。GeoGebra 目前已被翻譯成 40 種不同語言，使用者可以從 GeoGebra 官方網站免費下載這套軟體，網址為 <http://www.geogebra.org> (Saha et al., 2010)。GeoGebra 提供數學物件的三種基本的視區：幾何視區、代數視區和試算表視區。這些視區能夠將數學物件以三種不同形式的表徵呈現：圖形化 (例：點、直線、函數圖形)、代數化 (例：點座標、方程式) 與試算表 (例：矩陣的數值) 中表列呈現。同一個物件的所有表徵會動態連結並且同步調整位於其它視區的表徵 (Hohenwarter & Hohenwater, 2009)。

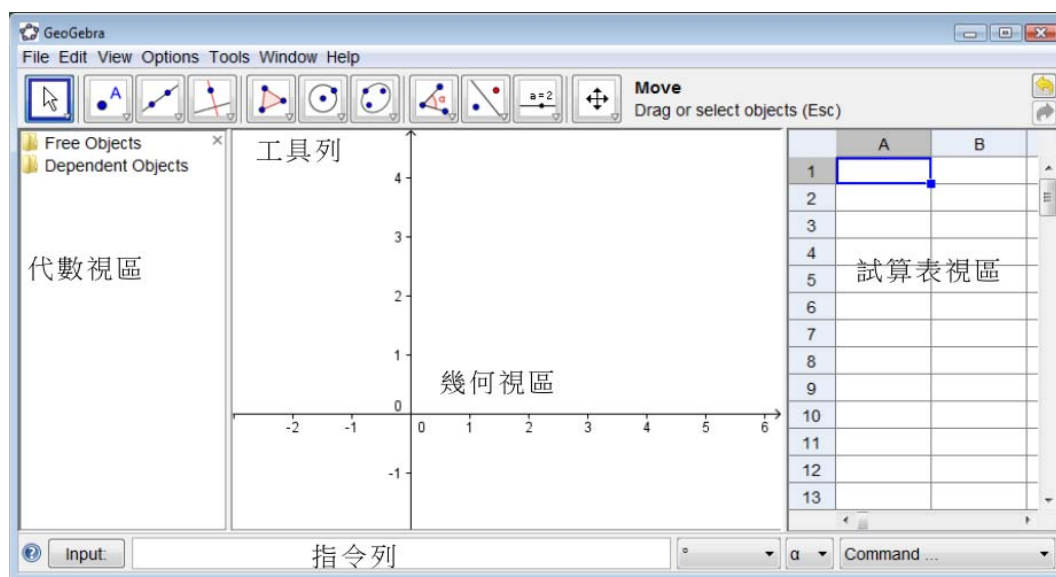


圖1 GeoGebra 的多重視區 (Hohenwarter & Hohenwater, 2009)

在代數視區中，列出物件的數學式型態的定義。例如點是以「 $A = (2, 3)$ 」、直線方程式以「 $L: 2x + 3y = 5$ 」的形態將其顯示 (高雄市政府教育局國民教育輔導團)。此外，代數區也可以顯示數值 (例： $a = -2.75$)、圓形 (例： $d: \text{Circle}[D, E]$)、三角形 (例： $\text{poly1} = \text{Polygon}[F, G, H]$)、五角形 (例： $\text{poly2} = \text{Polygon}[L, M, N, O, P]$)、函數 (例： $p(x) = x^3 + 3x$) 等物件。這些物件也能以圖形的方式顯示在幾何視區中，當代數視區的數值更改時，幾何視區的圖形也會跟著改變。在圖 1 中，工具列可以用來畫圖 (包括：點、直線、線段、垂直線、平行線、多邊形、圓、圓弧、曲線等)，也可以用來計算夾角、面積、斜率、距離、函數極大或極小值等，還可以用來輸入文字以及加入按鈕物件等。圖 1 下方的指令列可以用來輸入 GeoGebra 的指令，也可以用來建立物件 (例：在指令列輸入 " $p(x) = x^3 + 3x$ "，代表 $p(x) = x^3 + 3x$)。圖 1 右方的試算表視區可以輸入數值以建立矩陣或表格，也可以如同微軟的 Excel 軟體般用於四則運算以及函數計算 (例：輸入 " $=\cos(\pi)$ " 表示計算 $\cos(\pi)$)。

如果要撰寫程式，可以用滑鼠在幾何視區的圖形上點選，在屬性視窗的程式區裡可以撰寫 GeoGebra 程式碼或 JavaScript 程式。程式可以控制圖形，以動態的方式來展示。

3. 以 GeoGebra 輔助學生學習數學

本節將介紹應用 GeoGebra 軟體於資訊數理基礎課程以及管理數學課程的幾個範例，包括：資訊數理基礎的圖解指數與對數函數單元，以及管理數學的求解聯立方程式單元以及用圖解法求解線性規劃問題的單元。資訊數理基礎以及管理數學分別開設於大二以及大三。在課堂中首先講解這些單元的理論知識，然後示範如何用 GeoGebra 解決這些數學問題，最後再讓學生實際在電腦上練習用 GeoGebra 解決問題。

3.1. 以 GeoGebra 圖解指數函數與對數函數

透過 GeoGebra 的數值滑桿互動功能，可以讓學生更容易了解指數函數與對數函數的特性。指數函數與對數函數的公式如下：

$$\text{指數函數 } f(x) = e^{bx}, \text{ 其中 } b \in [-5, 5]; \quad (1)$$

$$\text{對數函數 } g(x) = \log_n x, \text{ 其中 } n = 2, 3, 4, \dots, 30. \quad (2)$$

在平面直角坐標系統中，學生可以透過設定不同的 b 以及 n 值 (如公式(1)、公式(2))，畫出不同特徵函數圖形 (如圖 2)。GeoGebra 的數值滑桿功能，可以讓學生在滑桿上控制變數數值 (在此為 b 及 n) 大小，函數圖形也會同時發生變化。學生可以觀看不同數值變化對函數產生的影響，熟悉函數的特性。以下提出幾個問題給學生練習以增進知能：

1. 移動變數 b 及 n 的滑桿，使得
 - (1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 相交於一點；
 - (2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 相交於兩點；
 - (3) $f(x)$ 與 $g(x)$ 沒有交點。
2. 移動變數 n 的滑桿，請說明 $g(x)$ 與 $y=x$ 函數的交點。
3. 移動變數 b 的滑桿，請解釋當 $b=0$ ， $b<0$ 以及 $b>0$ ， $f(x)$ 有何變化。

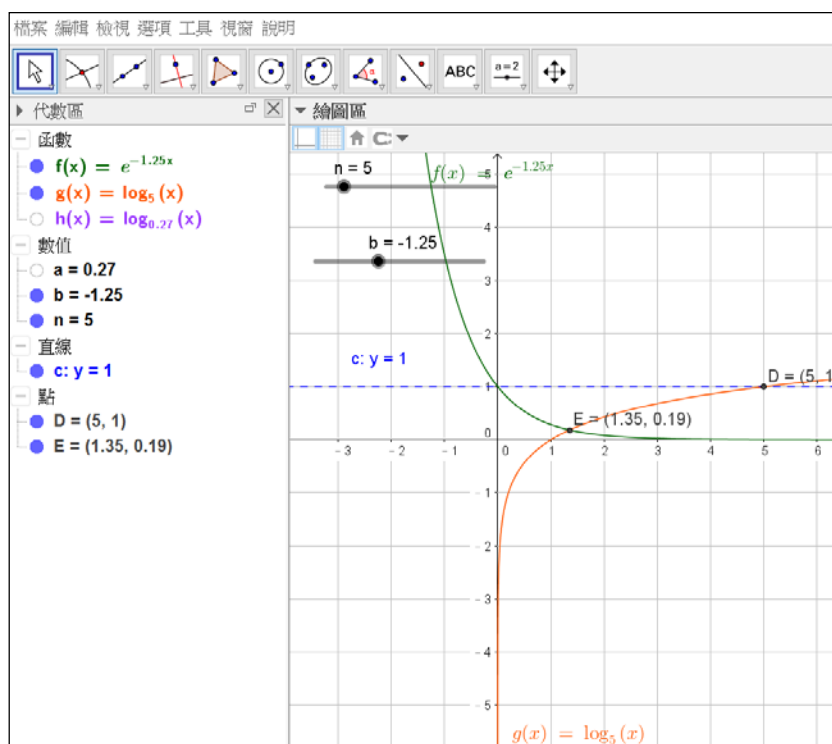


圖2 指數函數與對數函數的互動式圖形

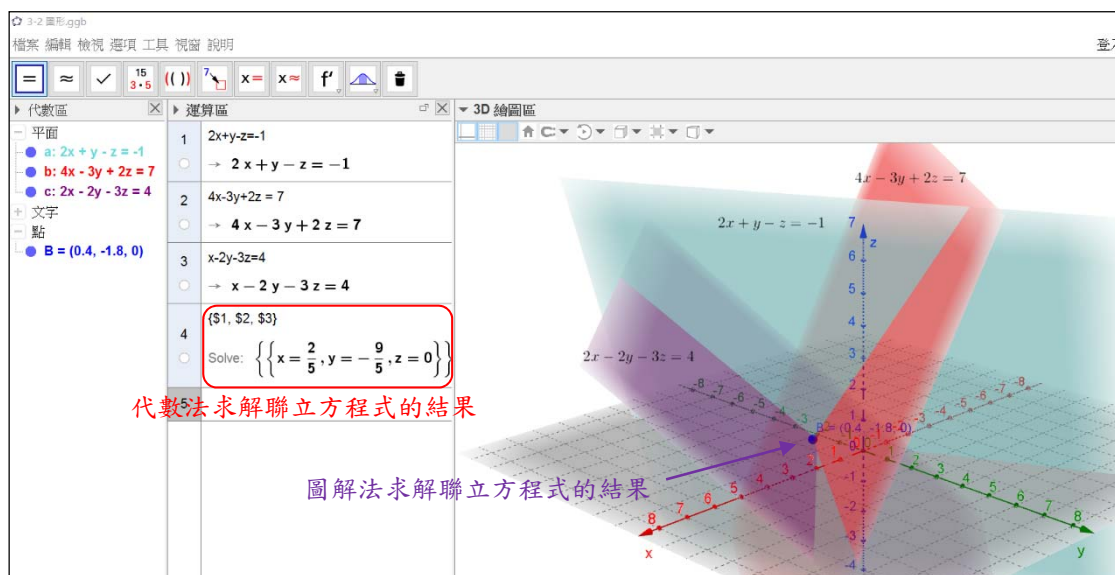


圖3 三個變數聯立方程式的立體圖

3.2. 以 GeoGebra 求解聯立方程式

GeoGebra 除了可以畫出 2D 的圖形外，也可以製作 3D 的立體圖。以下為三個變數的聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 4x - 3y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad (3)$$

在此問題中，可以請學生畫公式(3)的 3D 立體圖 (如圖 3)，旋轉立體圖可以觀看不同角度的圖形。求解公式(3)的聯立方程式有兩種方式：(1) 圖解法，利用 GeoGebra 畫交點的功能，可以在 3D 空間中點出三個平面 (表示三個方程式) 的交點。如圖 3 所示，交點為 $(0.4, -1.8, 0)$ 。(2) 代數法，首先在 GeoGebra 的運算區中分別輸入公式(3)的三個方程式。然後利用求解的功能，計算聯立方程式的解為 $x = 2/5, y = -9/5, z = 0$ (如圖 3)。由於 3D 繪圖沒有提供數值滑桿的功能，所以無法動態地調整公式(3)的變數係數。

3.3. 以 GeoGebra 求解線性規劃問題

線性規劃的問題是要求在資源有限或某限制條件下，使得利潤最大或者成本最低的最佳方案。若只有兩個決策變數可用圖解法求解，因此我們可用 GeoGebra 繪圖以互動方式找到最佳方案。以下舉財務規劃問題作為範例：

假設一對美國夫婦擁有 \$30,000，想要投資有價證券。投資經紀人建議兩種投資標的：其一是有 8% 利得的 AAA 債券，另一是利得為 12% 的 B⁺ 債券。經過考慮後，這對夫婦決定最多投資 B⁺ 債券 \$12,000 且至少投資 AAA 債券 \$6,000；他們也希望 AAA 債券的投資總額必須

超過 B⁺ 債券的投資總額或一樣多。試問經紀人應該提出何種建議，才能獲得最大投資報酬？以下列出這個問題的線性規劃模式 (趙可南，2012)：

$$\begin{aligned} & \text{目標函數 } P = 0.08x + 0.12y \\ & \text{限制條件 } \begin{cases} x + y \leq 30,000 \\ y \leq 12,000 \\ x \geq 6,000 \\ x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

欲畫出上述線性規劃問題的可行解區域 (如圖 4)，首先畫出限制條件的等式方程式圖形 (將不等式改為等式)。然後決定由這六條限制條件所交集圍成的可行解區域，並且點畫出可行解區域的五個角點 (每個角點有兩條直線相交)。若目標函數為 $0.18x + 0.12y = p$ ，我們可以建立 p 的數值滑桿 (範圍介於 0 至 3,000)。當增加滑桿數值，目標函數 P 的圖形會往右上方平行移動。可以讓學生實際移動滑桿，找到一個具有最大目標函數的角點 (最佳解)。以下幾個問題可以讓學生練習回答：

1. 移動數值滑桿找出具有最小利潤以及最大利潤的角點。
2. 在不改變可行解區域的形狀之下，試著用滑鼠拖曳在公式(4)的上面四個限制條件 (不包括 $x \geq 0$ 以及 $y \geq 0$)，平行移動直線後再觀察最大利潤為何。
3. 如果希望增加最大利潤，則應該平行移動哪一條直線方程式？

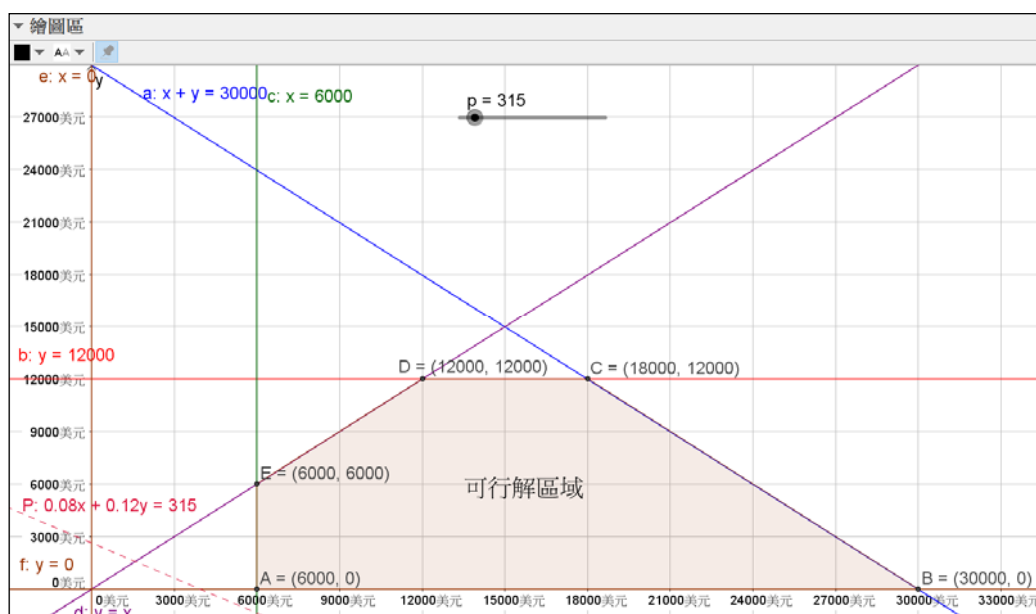


圖4 線性規劃問題的圖解

4. 學生學習效果

管理數學的課程分別開設於 104 學年度上學期的日間部三年級以及進修部三年級，這兩個班級上課時都應用 GeoGebra 輔助教學並且讓學生學習以求解數學問題。平時的隨堂練習以及作業都有讓學生實際練習 GeoGebra 的題目，期中考以及期末考也將 GeoGebra 的實作題納入考試範圍。這兩個班級對於 GeoGebra 的學習態度以及效果不同。進修部三年級的學生人數較少，學生的程度比較差，數學的基礎普遍不佳。雖然學生數學的計算能力較差，邏輯推理能力也不好，但是卻能夠用 GeoGebra 正確地解決數學問題。期中考以及期末考可以讓學生選擇以手算回答問題或者用 GeoGebra 得到問題解答，學生大都用 GeoGebra 來解決問題。使用 GeoGebra 回答數學問題只需要熟悉操作步驟，就能夠得到解答，不需要思考，也不需要數學計算。因此，GeoGebra 或者其它數學軟體能夠幫助數學程度較差的學生，增加學習動機以及興趣，並且建立信心。學生能夠容易使用 GeoGebra 解決數學問題。也能夠輔助學生學習數學理論，以及驗證自己的計算結果。

日間部學生的數學程度比進修部學生好，計算能力比較強。期中考的題目包括手算題以及用 GeoGebra 求解的實作題，學生用手算回答問題或者以 GeoGebra 求解問題的成績並無顯著差異。

5. 結論

本論文簡介一套免費的動態數學軟體：GeoGebra，將其應用於數學課程的教學中。GeoGebra 已被翻譯成 40 種不同國家語言，被推廣至全世界，能夠用來解決幾何學、代數、微積分以及統計學等問題。本論文也介紹 GeoGebra 應用於數學課（包括資訊數理基礎以及管理數學）的圖解指數與對數函數單元、求解聯立方程式單元以及用圖解法求解線性規劃問題的單元。透過 GeoGebra 的數值滑桿等互動功能，可以讓學生更清楚了解函數的特徵以及問題的最佳解的變化。幫助學生更容易學習這些數學單元。

在管理數學課程中，我們應用 GeoGebra 軟體輔助學生學習數學。由學生的學習效果得知，GeoGebra 軟體可以幫助數學程度較差的學生，培養對數學的興趣以及建立信心。即使數學能力不好，也能夠正確地用 GeoGebra 解決數學問題。和徒手方式的計算比較，學生比較容易使用 GeoGebra 解決數學問題。

6. 參考文獻

- [1] 高雄市政府教育局國民教育輔導團，數學領域資訊融入教學資源，Geogebra 使用入門：數位式的坐標平面系統，<http://www.ceag.kh.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/24/40.pdf>
- [2] 趙可南 譯，Michael Sullivan 作，管理數學，臺中市，滄海圖書資訊，民國 101 年，第 11 版。
- [3] 羅驥韡、許舜淵、彭建勛、呂鳳琳、胡政德、左台益翻譯，M. Hohenwarter and J. Hohenwarter 作，GeoGebra 使用說明，GeoGebra，<http://www.geogebra.org>，民國 98 年 10 月，3.2 版。

- [4] A. Akkaya, E. Tatar, and T. B. Kağızmanlı, “Using dynamic software in teaching of the symmetry in analytic geometry: The case of GeoGebra,” *Procedia- Soc. Behav. Sci.*, Vol. 15, pp. 2540–2544, 2011.
- [5] M. Doğan and R. İçel, “The role of dynamic geometry software in the process of learning : GeoGebra example about triangles,” *Int. J. Hum. Sci.*, Vol. 8, No. 1, pp. 1441-1458, 2011.
- [6] GeoGebra 官方網站，關於，<http://www.geogebra.org/about>
- [7] M. Hohenwarter, *GeoGebra - ein Software system für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*, Master’s thesis, Universität Salzburg, 2002.
- [8] M. Hohenwarter and K. Fuchs, “Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra,” in *Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*, 2004.
- [9] R. A. Saha, A. F. M. Ayub, and R. A. Tarmizi, “The effects of GeoGebra on mathematics achievement: Enlightening Coordinate Geometry learning,” *Procedia- Soc. Behav. Sci.*, Vol. 8, pp. 686-693, 2010.